Equações de Maxwell e Equação da Onda

by Prof. Claudir Barbieri

by www.eletricatotal.net

1 Introdução

Podemos afirmar que até James Clerk Maxwell (1 831 - 1 879) as quatro equações que regiam o eletromagnetismo desenvolvidas por Faraday eram dadas por:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \mathbf{x} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \mathbf{x} \vec{H} = \vec{J} \tag{4}$$

e, após uma análise detalhada de Maxwell, ele percebeu que a equação (4) não atendia a lei da conservação de carga. Para entendermos isso, vamos aplicar o divergente nos dois membros da equação (4). Assim:

$$\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \mathbf{x} \vec{H}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{J} \tag{5}$$

Ora, sabemos que o divergente do rotacional de qualquer campo é igual a zero. Logo, pode-se escrever:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} = 0 \tag{6}$$

Isto está em contradição com a equação da conservação de carga elétrica que é dada por:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

Logo, percebemos claramente que a equação (6) não é compatível com a lei da conservação de carga elétrica. Maxwell percebendo essa incompatibilidade, adicionou um termo à equação (4), de tal forma que o resultado final atendesse a lei da conservação de carga elétrica. Então, o termo adicionado transformou a equação (4) na seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \mathbf{x} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{8}$$

Esse termo adicional é conhecido como *Corrente de Deslocamento*. Vamos verificar se esse termo resolve a compatibilidade, conforme dito acima. Para tal, vamos aplicar o divergente nos dois membros da equação (8) obtendo:

$$\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \mathbf{x} \vec{H}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{\partial (\vec{\nabla} \bullet \vec{D})}{\partial t} \tag{9}$$

Como já mencionado, o divergente do rotacional de qualquer campo é igual a zero. Por outro lado, o divergente de $\vec{D}$ é fornecido pela equação (1) e o resultado final é:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Percebemos que a equação (10) é exatamente igual a equação (6), tornando a equação (8) totalmente compatível com a lei da conservação de carga elétrica.

by www.eletricatotal.net

2 Equação da Onda

De posse de todas as informações adquiridas na seção anterior, vamos estabelecer as condições necessárias para estudarmos a equação da onda. Embora essas equações sejam válidas para qualquer meio material, vamos estudar um caso particular que é a validade dessas equações para um meio chamado espaço livre. Para este meio vamos impor a condição de $\rho = 0$ e também $\overrightarrow{J} = 0$.

Desta forma, sabendo que $\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E}$ e considerando as condições acima, podemos escrever:

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{E} = 0 \tag{11}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{B} = \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{B} = 0 \tag{14}$$

Essas últimas quatro equações é que são chamadas de *Equações de Maxwell* no espaço livre, onde temos uma ausência de distribuição de cargas ($\rho = 0$) e uma ausência de cargas em movimento ($\overrightarrow{D} = 0$).

Baseado nessas equações, vamos aplicar o rotacional na equação (12). Então:

$$\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} (\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{E}) = -\frac{\partial (\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{B})}{\partial t} \tag{15}$$

Vamos fazer o mesmo procedimento com a equação (13). Logo:

$$\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} (\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{B}) = \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial (\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{E})}{\partial t} \tag{16}$$

Porém, as equações (12) e (13) definem o rotacional de $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$. Fazendo as substituições nas equações (15) e (16), temos:

$$\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} (\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{E}) = -\epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{17}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} (\overrightarrow{\nabla} \mathbf{x} \overrightarrow{B}) = -\epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} \tag{18}$$

by www.eletricatotal.net

Entretanto, na álgebra vetorial, considerando um campo qualquer, que chamaremos de $\overrightarrow{X}$, temos a seguinte propriedade:

$$\overrightarrow{\nabla}\,\mathbf{x}\,(\overrightarrow{\nabla}\,\mathbf{x}\,\overrightarrow{X}) \;=\; \overrightarrow{\nabla}\,(\overrightarrow{\nabla}\bullet\overrightarrow{X}) \;-\; \overrightarrow{\nabla}^2\,\overrightarrow{X} \tag{19}$$

Devemos prestar atenção ao fato que quando substituirmos, na equação (17), o vetor $\overrightarrow{X}$ por $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$, a primeira parcela do segundo membro será nula, devido as equações (11) e (14). Então, desconsiderando essa parcela e rearranjando os termos das equações (17) e (18), temos:

$$\nabla^2\,\overrightarrow{E} \;=\; \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial\,t^2} \tag{20}$$

$$\nabla^2\,\overrightarrow{B} \;=\; \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial\,t^2} \tag{21}$$

As equações (20) e (21) podem ser generalizadas para o espaço tridimensional e ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla^2\,\overrightarrow{E}(x,y,z,t) \;-\; \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{E}(x,y,z,t)}{\partial\,t^2} \;=\; 0 \tag{22}$$

$$\nabla^2\,\overrightarrow{B}(x,y,z,t) \;-\; \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{B}(x,y,z,t)}{\partial\,t^2} \;=\; 0 \tag{23}$$

Por outro lado, sabemos que a equação da onda, de qualquer natureza, pode ser expressa como:

$$\left(\nabla^2 \;-\; \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\right)\overrightarrow{X} \;=\; 0 \tag{24}$$

Com base nessa informação, Maxwell deduziu que as constantes ϵ_0 e μ_0 estavam diretamente relacionadas com a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas. Portanto é possível escrever que:

$$v \;=\; \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\,\mu_0}} \tag{25}$$

E essa velocidade é conhecida como *velocidade da luz* e é representada pela letra c.

by www.eletricatotal.net

Sabendo que:

$$\epsilon_0 = 9,964 \text{ x } 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$\mu_0 = 1,257 \text{ x } 10^{-6} \frac{H}{m}$$

Substituindo esses valores na equação (25) vamos encontrar o valor da velocidade da luz em m/s, ou:

$$c = 299.792.458 \frac{m}{s}$$

by www.eletricatotal.net

3 Referências

[1] USP, Portal de Video Aulas, Prof. Dr. Gil da Costa Marques, disponível em http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6077, visitado em 20/03/2020.

[2] HALIDAY & RESNICK, Fundamentos de Física, Vol. I, 8ª edição, Editora LTC, 2 008.

[3] TIPLER & LLEWELLYN, Física Moderna, 3ª edição, Editora LTC, 2 006.