Teorema da Máxima Transferência de Potência em AC

by www. eletricatotal. com

No Capítulo 7 estudamos este teorema quando tínhamos somente resistores em um circuito DC. Agora vamos estudá-lo em AC e quando há presença de elementos reativos no circuito. Vamos considerar uma impedância em série com uma fonte de tensão, de tal forma que ela seja uma impedância complexa. Desta forma, ela será do tipo:

$$Z_i = R_i \pm j X_i \tag{1}$$

A carga também será uma impedância complexa. Escreveremos como:

$$Z_L = R_L \pm X_L \tag{2}$$

Para calcularmos a potência dissipada na carga, vamos inicialmente calcular a corrente elétrica que circula pelo circuito. Veja o circuito mostrado na Figura 1 como referência.

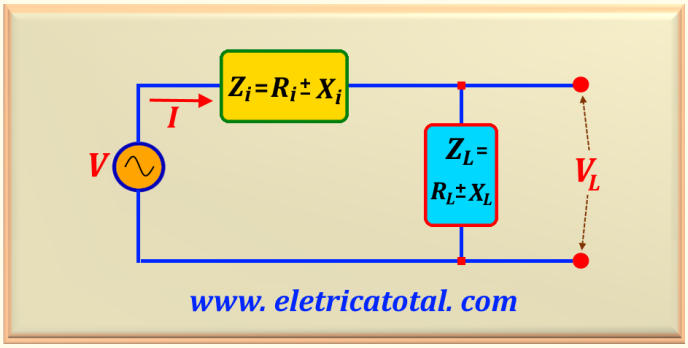

Figura 1: Circuito como referência

Assim, podemos escrever que:

$$I = \frac{V}{Z_i + Z_L} \tag{3}$$

Agora que conhecemos o valor de I, vamos aplicar a seguinte equação para calcular a potência:

$$P = |Z_L| \, I^2 \tag{4}$$

Substituindo o valor de I encontrado na equação (3) em (4), obtemos:

$$P = |Z_L| \left(\frac{V}{Z_i + Z_L} \right)^2 \tag{5}$$

Podemos realizar uma manipulação algébrica na equação (5) e encontrar:

$$P = \frac{Z_L}{(Z_i + Z_L)^2} \, V^2 \tag{6}$$

Vamos admitir, baseado no circuito mostrado na Figura 1, que tenhamos uma fonte de tensão e uma impedância complexa fixa em uma associação série, fornecendo potência a uma carga. Consideremos a carga uma **impedância complexa variável**. Dessa forma, podemos ter três casos distintos. Vamos analisar cada caso separadamente.

Caso 1 - Temos $R_L \neq 0$ e $X_L = 0$

Este é o caso em que a carga é **puramente resistiva**. Então vamos recalcular o valor da corrente elétrica substituindo Z_L por R_L.Logo:

$$I = \frac{V}{Z_i + R_L} = \frac{V}{(R_i + R_L) + j\,X_i} \tag{7}$$

Mas, para calcularmos a potência, necessitamos conhecer o valor absoluto da corrente elétrica. Então, temos:

$$|\,I\,| = \frac{V}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}} \tag{8}$$

Então a potência entregue à carga R_L será:

$$P = |\,Z_L\,|\,I^2 = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}\,V^2 \tag{9}$$

Como queremos encontrar para qual valor de R_L vamos obter a máxima transferência de potência à carga, devemos calcular a derivada primeira da equação acima em relação à R_L e igualar seu resultado a **zero**. Assim:

$$\frac{dP}{dR_L} = V^2 \left\{ \frac{[\,(R_i + R_L)^2 + X_i^2\,] - 2\,R_L\,(R_i + R_L)}{[\,(R_i + R_L)^2 + X_i^2\,]^2} \right\} = 0 \tag{10}$$

Obviamente que para essa expressão ser nula, devemos ter o numerador igual a **zero**. Trabalhando algebricamente o numerador encontramos a seguinte expressão:

$$R_i^2 + 2\,R_i\,R_L + R_L^2 + X_i^2 - 2\,R_i\,R_L - 2\,R_L^2 = 0 \tag{11}$$

Efetuando as operações algébricas necessárias para simplificar a expressão chegamos a:

$$R_i^2 + X_i^2 = R_L^2 \tag{12}$$

Dessa forma, chegamos a forma final, ou seja:

$$\boxed{R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |Z_i|} \tag{13}$$

Portanto, concluímos que para conseguirmos a máxima transferência de potência para uma carga puramente resistiva, seu valor deve ser igual ao valor absoluto da impedância do circuito que interliga a carga à fonte de tensão.

Caso 2 - Temos $R_L \neq 0$ e $X_L \neq 0$

Este é o caso em que a carga possui elemento resistivo **fixo** e reativo **variável**. Então, calculando o valor da corrente elétrica temos:

$$I = \frac{V}{Z_i + Z_L} \quad \text{ou} \quad |I| = \frac{V}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}} \tag{14}$$

E o valor da potência é dado por:

$$P = R_L \, |I|^2 \tag{15}$$

Substituindo a equação (14) em (15), obtemos:

$$P = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} \, V^2 \tag{16}$$

Observe que neste caso, o valor de R_L é fixo. Assim, vamos derivar a equação (16) em relação à X_L e consideraremos R_L constante. Então:

$$\frac{dP}{dX_L} = V^2 \left\{ \frac{-2\,R_L\,(X_i + X_L)}{[\,(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2\,]^2} \right\} = 0 \tag{17}$$

Como R_L e V possuem valores fixos, a única maneira de anularmos esta derivada é se:

$$\boxed{X_L = -X_i} \tag{18}$$

Em outras palavras, o valor da carga deve ser o **complexo conjugado** da impedância Z_i.

Caso 3 - Temos $R_L \neq 0$ e $X_L \neq 0$

Este é o caso em que a carga possui elemento resistivo **variável** e reativo **fixo**. Se fizermos os cálculos para a corrente elétrica e potência encontraremos os mesmos valores que no caso 2. Logo:

$$P = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} V^2 \tag{19}$$

Note que neste caso, o valor de X_L é fixo. Assim, vamos derivar a equação (19) em relação à R_L e consideraremos X_L constante. Então:

$$\frac{dP}{dX_L} = V^2 \left\{ \frac{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2 - 2\,R_L\,(R_i + R_L)}{[\,(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2\,]^2} \right\} = 0$$

Efetuando as operações algébricas de simplificação no numerador, chegamos a:

$$R_L^2 = R_i^2 + (X_i + X_L)^2 \tag{20}$$

Ora, extraindo a raiz quadrada de R_L encontramos a condição que procuramos, ou seja:

$$\boxed{R_L = \sqrt{(R_i)^2 + (X_i + X_L)^2} = |\,Z_i + j\,X_L\,|} \tag{21}$$

Desta forma, concluímos que ocorre a máxima transferência de potência à carga, quando R_L é igual ao valor absoluto da impedância do circuito.