
www.eletricatotal.com

Motor de Inducción Monofásico Cálculo de Impedancia

by www.eletricatotal.com

Partiendo del circuito equivalente de un motor de inducción monofásico, como se muestra en la Figura 1, podemos calcular el paralelo de las resistencias y reactancias que aparecen en el circuito.

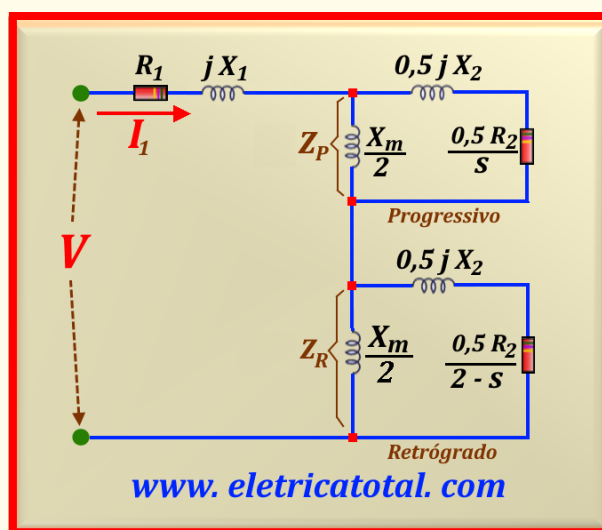


Figura 1: Circuito de referencia

Circuito Progresivo

A partir del circuito anterior, podemos verificar fácilmente que la impedancia **progresiva**, que llamaremos Z_P , viene dada por:

$$Z_P = \frac{j \frac{X_m}{2} \left(j \frac{X_2}{2} + \frac{R_2}{2s} \right)}{\frac{R_2}{2s} + j \frac{(X_m + X_2)}{2}} \quad (1.1)$$

Realizando las operaciones indicadas y, luego de algo de trabajo algebraico, llegamos a:

$$Z_P = \frac{1}{2} \left[\frac{-s X_m X_2 + j R_2 X_m}{R_2 + j s (X_m + X_2)} \right] \quad (1.2)$$

Para eliminar el número complejo del denominador de la ecuación, debemos multiplicarlo y dividirlo por su conjugado complejo. Así, algebraicamente, obtenemos:

$$Z_P = \frac{1}{2} \left[\frac{s R_2 X_m^2 + j [s^2 X_m X_2 (X_m + X_2) + R_2^2 X_m]}{R_2^2 + s^2 (X_m + X_2)^2} \right] \quad (1.3)$$

Por otro lado, según la definición de impedancia progresiva, podemos escribirla como una parte real, que representa la **resistencia progresiva**, y una parte imaginaria, que representa la **reactancia progresiva**. Por lo tanto, tenemos:

$$R_P = \frac{1}{2} \left[\frac{s R_2 X_m^2}{R_2^2 + s^2 (X_m + X_2)^2} \right] \quad (1.4)$$

$$X_P = \frac{1}{2} \left[\frac{s^2 X_m X_2 (X_m + X_2) + R_2^2 X_m}{R_2^2 + s^2 (X_m + X_2)^2} \right] \quad (1.5)$$

Estas ecuaciones representan los valores correctos de R_P y X_P . Sin embargo, por supuesto, en muchas publicaciones se han incluido algunas consideraciones para simplificarlas. Veamos qué se puede hacer. En general, tenemos $X_m \gg X_2$. Con esto en mente, es posible escribir $X_m + X_2 \approx X_m$. Por lo tanto, es posible escribir las siguientes aproximaciones:

$$R_P = \frac{1}{2} \left[\frac{s R_2 X_m^2}{R_2^2 + s^2 X_m^2} \right] = \frac{R_2}{2 s \left[\left(\frac{R_2}{s X_m} \right)^2 + 1 \right]} \quad (1.6)$$

$$X_P = \frac{1}{2} \left[\frac{s^2 X_m^2 X_2 + R_2^2 X_m}{R_2^2 + s^2 X_m^2} \right] \quad (1.7)$$

Podemos verificar la validez de las aproximaciones utilizando como referencia el Ejemplo 9-1, página 595, del libro **Fundamentos de Máquinas Eléctricas - Chapman - 5.ª edición**. Sin embargo, cabe destacar que en el libro el valor final de Z_P tiene un error de impresión. Donde dice

$$Z_P = 25,4 + j 30,7 = 39,90 \angle 50,5^\circ$$

leer

$$Z_P = 28,31 + j 31,17 = 42,11 \angle 47,75^\circ$$

Los datos proporcionados en el problema son:

$$R_1 = 1,52 \Omega \quad R_2 = 3,13 \Omega \quad X_1 = 2,10 \Omega$$

$$X_2 = 1,56 \Omega \quad X_m = 58,2 \Omega$$

Luego, utilizando nuestras ecuaciones aproximadas (1.6) y (1.7), sustituyendo sus respectivos valores numéricos, encontramos:

$$R_P = 14,51 \Omega \quad X_P = 15,97 \Omega$$

Para comparar los valores, debemos multiplicarlos por dos, ya que la metodología utilizada en el libro es diferente a la que utilizamos en el sitio web. Sin embargo, los resultados finales son los mismos, ya que en el libro, al calcular las potencias, los valores de R_P y X_P se dividen entre dos.

Dividamos entonces los valores del libro entre dos, obteniendo:

$$R_P = 14,16 \Omega \quad X_P = 15,59 \Omega$$

Nótese que las diferencias están en los decimales, lo que demuestra que es perfectamente posible utilizar las ecuaciones con aproximación.

Circuito Retrógrado

Para el circuito retrógrado y utilizando la Figura 1 como referencia, el valor de Z_R es:

$$Z_R = \frac{j \frac{X_m}{2} \left(j \frac{X_2}{2} + \frac{R_2}{2(2-s)} \right)}{\frac{R_2}{2(2-s)} + j \frac{(X_m + X_2)}{2}} \quad (1.8)$$

Realizando las operaciones de la ecuación (1.8) y luego de realizar algún trabajo algebraico, obtenemos:

$$Z_R = \frac{1}{2} \left[\frac{-X_m X_2 (2-s) + j R_2 X_m}{R_2 + j (X_m + X_2) (2-s)} \right]$$

Al multiplicar y dividir la fracción por su conjugado complejo, eliminamos el término imaginario del denominador. Así, obtenemos:

$$Z_R = \frac{1}{2} \left[\frac{(2-s) R_2 X_m^2 + j [(2-s)^2 X_m X_2 (X_m + X_2) + R_2^2 X_m]}{R_2^2 + (2-s)^2 (X_m + X_2)^2} \right]$$

Y según la definición de impedancia inversa, podemos escribirla como una parte real, que representa la **resistencia inversa**, y una parte imaginaria, que representa la **reactancia inversa**. Así, obtenemos:

$$R_R = \frac{1}{2} \left[\frac{(2-s) R_2 X_m^2}{R_2^2 + (2-s)^2 (X_m + X_2)^2} \right] \quad (1.9)$$

$$X_R = \frac{1}{2} \left[\frac{[(2-s)^2 X_m X_2 (X_m + X_2) + R_2^2 X_m]}{R_2^2 + (2-s)^2 (X_m + X_2)^2} \right] \quad (1.10)$$

Estas ecuaciones representan los valores correctos de R_R y X_R . Sin embargo, simplificar ecuaciones es una práctica común en ingeniería eléctrica, especialmente cuando se trata de valores significativamente mayores o menores en comparación con otros términos de la ecuación. En el caso de la relación entre X_m y X_2 , si $X_m \gg X_2$, es razonable simplificar la expresión $X_m + X_2 \approx X_m$, ya que X_2 tiene un impacto insignificante en el resultado final. Este enfoque no solo simplifica los

cálculos, sino que también ayuda a centrarse en los componentes que realmente afectan el comportamiento del sistema. Sin embargo, es importante recordar que esta simplificación solo debe realizarse cuando la diferencia entre los valores sea lo suficientemente pequeña como para justificar la aproximación sin comprometer la precisión requerida para el análisis o la aplicación en cuestión. Así que tenemos las siguientes aproximaciones:

$$R_R = \frac{1}{2} \left[\frac{(2-s) R_2 X_m^2}{R_2^2 + (2-s)^2 X_m^2} \right] \quad (1.11)$$

$$X_R = \frac{1}{2} \left[\frac{[(2-s)^2 X_m^2 X_2 + R_2^2 X_m]}{R_2^2 + (2-s)^2 X_m^2} \right] \quad (1.12)$$

Utilicemos estas ecuaciones y comparémoslas con los resultados obtenidos en el libro de Chapman. Los valores del libro son:

$$Z_R = 1,51 + j 1,56 = 2,18 \angle 45,9^\circ$$

Luego, utilizando las ecuaciones aproximadas (1.11) y (1.12), sustituyendo sus respectivos valores numéricos, encontramos:

$$Z_R = 0,8 + j 0,8 = 1,13 \angle 45^\circ \Omega$$

Por lo tanto, es perfectamente posible utilizar las ecuaciones (1.11) y (1.12) para calcular los valores de R_R y X_R , ya que al dividiendo los valores contables por 2 (por las razones explicadas anteriormente), los errores son despreciables.

Así pues, la pregunta que debemos responder es:

¿Cuál es la ventaja de utilizar las ecuaciones desarrolladas en el sitio web?

Usar números reales en ecuaciones, en lugar de números complejos, puede ofrecer varias ventajas, especialmente en entornos educativos o en situaciones donde el acceso a calculadoras científicas es limitado. Trabajar con números reales puede simplificar el proceso de aprendizaje, haciendo que los conceptos sean más accesibles para los estudiantes que

comienzan a explorar las matemáticas avanzadas. Además, las operaciones con números reales son más intuitivas y pueden realizarse con calculadoras básicas, lo cual resulta útil en entornos donde no se dispone de recursos tecnológicos avanzados. Sin embargo, si bien simplificar a números reales puede ser conveniente, no reemplaza la necesidad de comprender y usar los números complejos en contextos apropiados.